

Rapport EDP

1-) Je décris de manière détaillée une méthodologie permettant de construire l'ensemble des aires de chacun des triangle contenu dans un maillage donné par ses tableaux des points et de connectivité.

On suppose qu'on dispose d'un maillage triangulaire d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ décrit par deux tableaux.

• Tableau des sommets

$$q = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n_q} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n_q} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times n_q}$$

où chaque colonne correspond aux coordonnées d'un sommet du maillage

• Tableau de connectivité

$$M \in \mathbb{N}^{3 \times n_{me}} = \begin{pmatrix} i_{1,1} & i_{1,2} & \dots & i_{1,n_{me}} \\ i_{2,1} & i_{2,2} & \dots & i_{2,n_{me}} \\ i_{3,1} & i_{3,2} & \dots & i_{3,n_{me}} \end{pmatrix}$$

où chaque colonne contient les indices des trois sommets formant un triangle du maillage.

le maillage contient donc

- n_q sommets
- n_{me} triangles.

soit \tilde{K} le triangle de référence défini de sommets

$$\hat{q}_0 = (0,0), \quad \hat{q}_1 = (1,0), \quad \hat{q}_2 = (0,1) \text{ et } \tilde{K} \text{ un triangle non dégénéré de sommets } (q_0, q_1, q_2).$$

On va tout d'abord chercher l'aire du triangle K

Oral pour toute fonction f

$$\int_K f(q) dq = |\det(A_K)| \int_{\hat{K}} f \circ \mathbb{F}_K(\hat{q}) d\hat{q}$$

Free $A_K = (q_1 - q_0, q_2 - q_0)$

$$f_k: \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$$

$$\hat{q}_2(\hat{x}, \hat{y}) \mapsto q_2 q_0 + (q_1 - q_0) \hat{x} + (q_2 - q_0) \hat{y}$$

$$\hat{F}_K(\hat{q}) = A_K \hat{q} + q_0$$

Pour $f=1$ en particulier, on obtient l'anneau de k

On a donc

$$\int_K dq = |\det(A_K)| \int_{\hat{K}} d\hat{q}$$

$$\Rightarrow \text{Adre}(K) \subset |\det(A_K)| \cdot \text{Apro}(\hat{K})$$

$\text{Ave}(K) = \frac{1}{2} |\det(A_K)|$ car $\text{Ave}(\hat{K}) = \frac{\hat{q}_1 \times \hat{q}_2}{2} = \frac{1}{2}$

On a donc $\text{Aore}(K) = \frac{1}{2} |\det(A_K)|$

Soit on a l'aire d'un triangle.

On va donc procéder à la création de notre tableau des axes.

- On va créer un tableau rempli de zéros ($1, n$) avec $n = \text{size}(m, 2)$ (m le tableau de connectivité)

- On va créer une boucle qui va de 1 à n. (pour calculer l'aire de chaque triangle et la mettre dans notre tableau)

On va donc commencer par chercher les points.

$q_0 = q(\cdot, m_x(1, k))$ (A^{er} kommt aus k -triangle)

$f_1 = g(z, m(z, k))$ (2^{ème} membre du 1^{er} triangle)

$$q_{\alpha} = q(1 \text{ me } (3, k)) \quad (3^{\text{eme}} \text{ u})$$

La matrice $A_k = [q_1 - q_0 \mid q_2 - q_0]$

On finit avec la forme de notre aire
 $Aire(k) = \frac{1}{2} |\det(A_k)|$

En respectant ces différentes activités, on obtient le tableau des aires.

Q-3 - Méthodologie permettant de construire les tableaux de points q et de connectivité, me amener au carré unité pour $N_x \geq 2$ et $N_y \geq 2$

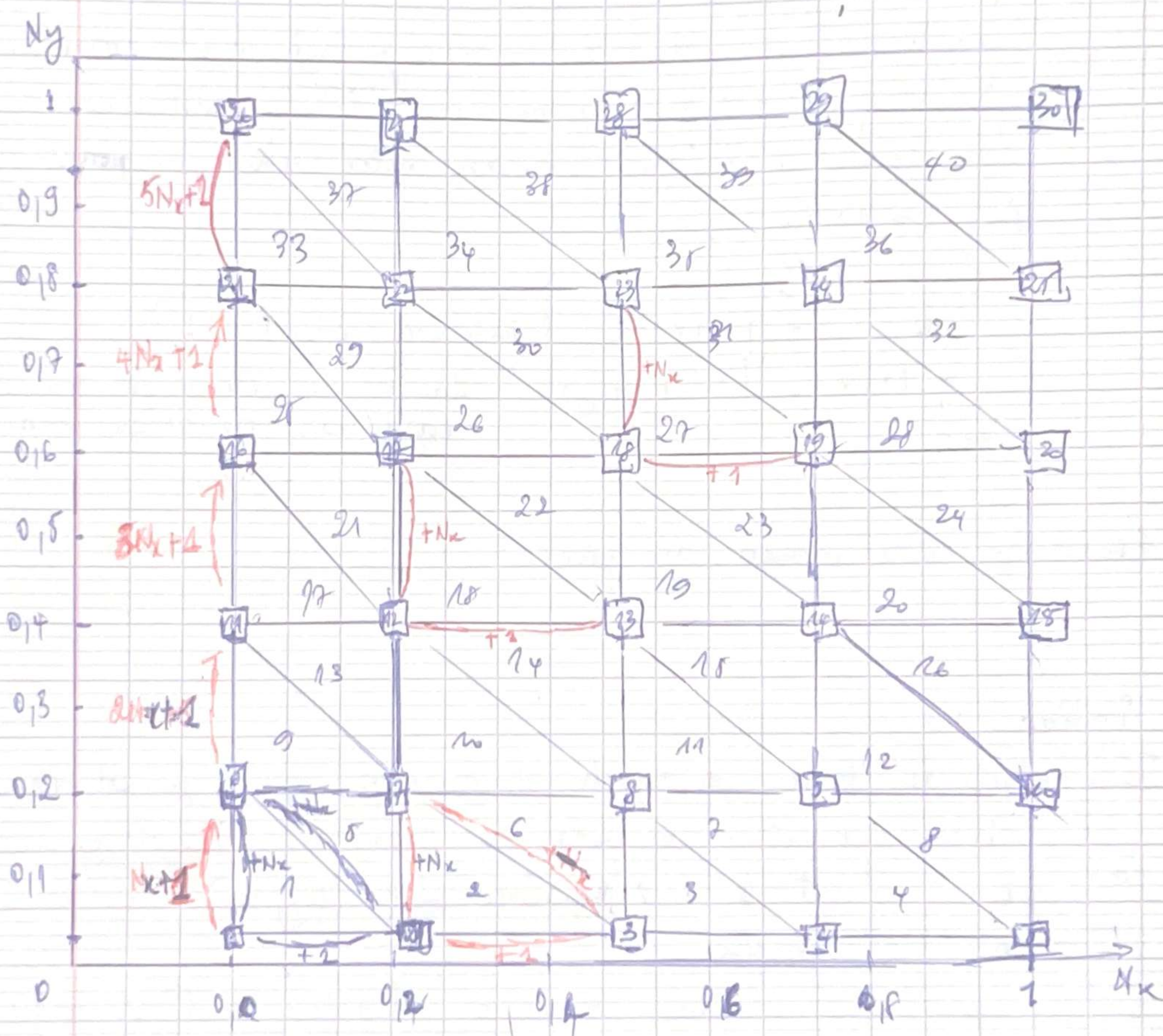


Fig. 1

On va tout d'abord commencer par créer les vecteurs x et y
 $x = \text{longueur } (0, 1, N_x)$ (qui représente notre repère)
 $y = \text{longueur } (0, 1, N_y)$

On va créer un tableau

• Tableau des points q .

On va créer un tableau rempli de zéros

$$q = \text{zeros}(2, Nx * Ny)$$

On remarque après que la bijection est $k = i + (j-1) * Nx$ (fig 1)
Avec i allant de 1 à Nx et j allant de 1 à Ny

On a donc

Algo 1 (Tableau des points)

fonction $[q, me] = \text{unitSquare}(Nx, Ny)$

$x = \text{linspace}(0, 1, Nx)$ % on crée le vecteur x représentant

$y = \text{linspace}(0, 1, Ny)$ % on crée y → l'abscisse l'ordonnée

$q = \text{zeros}(2, Nx * Ny)$ % on crée notre tableau de points q

for $i = 1 : Nx$

for $j = 1 : Ny$

$k = i + (j-1) * Nx$ (référence à la fig 1)

$q(i, k) = [x(i), y(j)]$ % dans chaque colonne on met les coordonnées de chaque sommet.

end

end

Et on a notre tableau des points.

• Tableau me

Pour obtenir les indices des sommets on remarque que le deuxième et le troisième sont obtenus à partir du premier, c'est-à-dire que

2^{ème} indice = 1^{er} + 1

3^{ème} indice = 1^{er} + Nx

On va poser Ip l'indice de points (l'adresse du 1^{er} sommet)

$$Ip = (j-1) * Nx + 1$$

On aura donc pour les triangles inférieurs

$$[Ip, Ip+1, Ip+Nx]$$

On rappelle que le nombre de triangles fait $N = 2 * (Nx-1) * (Ny-1)$

Pour les supérieurs on aura :
 $[I_p+1, I_p+1+N_x, I_p+1+N_x]$

Notre Algo donne

$$N = 2^N (N_x - 1) \cdot (N_y - 1)$$

$$m = \text{zeros}(3, N)$$

$k=1$

for $j=1:N_y-1$

$$I_p = (j-1) \cdot N_x + 1 \quad \% \text{ indice de point}$$

for $i=1:N_x-1$

$$m(:, k) = [I_p, I_p+1, I_p+N_x] \quad \% \text{ tri. inf (triangle inférieur)}$$

$$k = k+1; I_p = I_p+1$$

end

$$I_p = (j-1) \cdot N_x + 1 \quad \% \text{ Réinitialise } I_p$$

for $i=1:N_x-1$

$$m(i, k) = [I_p+1, I_p+1+N_x, I_p+N_x] \quad \% \text{ tri. sup}$$

$$k = k+1$$

$$I_p = I_p+1$$

end for

end

On a donc notre tableau de m

Q-4- Méthodologie permettant de construire les tableaux de points q et de connectivité m associé au rectangle $[a, b] \times [c, d]$

Alors la méthode la plus simple et la plus visible pour résoudre

Ce cas est de procéder exactement comme pour le carré ; à la seule différence que dans le losange, on aura plus des 0,1 mais

les domaines du rectangle $[a, b] \times [c, d]$

C'est à dire $x = \text{lospace}(a, b, N_x)$ et $y = \text{lospace}(c, d, N_y)$.

Q-5. Méthodologie permettant de construire le pont q et de connecter le pont au triangle unité.

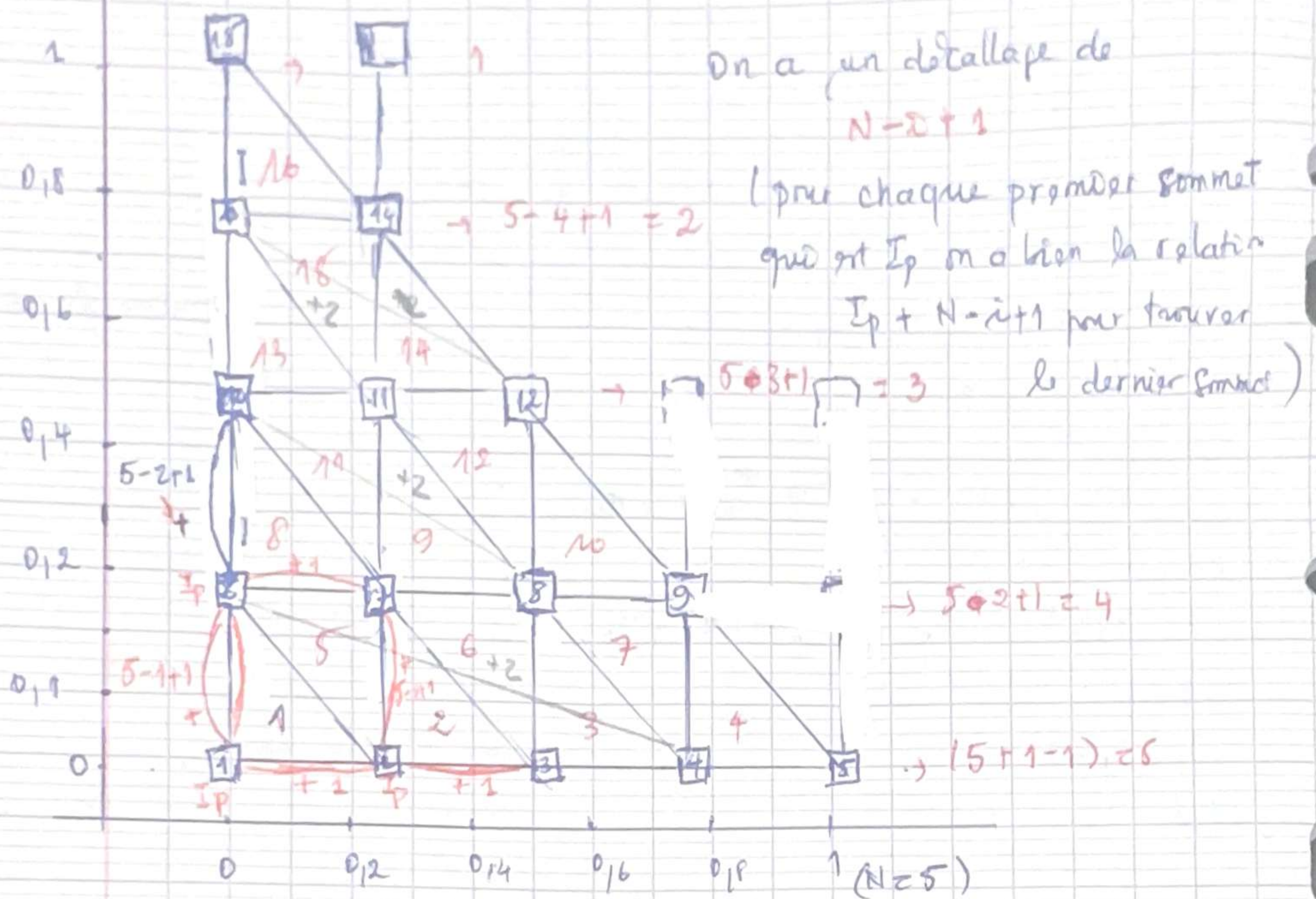


Fig 2.

Tableaux de ponts q

Etant donné qu'on observe un décalage (le maillage n'étant pas comme celui du rectangle ou carré) on ne va pas procéder par bijection pour le tableau de ponts de q , on va faire autrement.

le plus gros problème ici serait de traduire la variation de chaque ligne (on remarque un décalage à chaque ligne).

Si on représente q par les lignes et q par les colonnes $j=1, \dots, N+2-1$ (j varie de 1 à $N+2+1$) (voir fig 2)

Ainsi on aura Algo1

for $i = 1 : N$

for $j = 1 : N + 1 - i$

$q(i, k) = [x(i), y(i)]$

$k = k + 1$

end

end

} Voilà ce que doit donner un bon notre
code pour remplir le tableau des
q.

Sans oublier qu'il faut initialiser les x , et y et aussi le q
comme on l'avait fait précédemment (pour le carré / rectangle).
En suivant bien cette méthodologie on remplit sans problème
notre tableau de points q .

Tableau m_e

On va tout d'abord commencer par chercher la formule pour connaître
le nombre de triangles. En se référant à la fig 2 on
remarque facilement que $n_{m_e} = (N-1) * (N-1)$. Après cela
on peut construire notre tableau de m_e , en commençant par
la remplir de zéros ($m_e = \text{zeros}(3, n_{m_e})$).

Par la suite comme pour les autres, le noeud ici est de trouver
une formule pour les indices de points (que l'on va nommer I_p).

Ici, on ne va pas fixer une formule pour I_p comme pour le
carré, on va plutôt s'en passer autrement.

• Pour les triangles Tout d'abord on va écrire notre I_p à 1

Pour les triangles inférieurs

$m_e(i, k) = [I_p, I_p + 1, I_p + N - i + 1]$ (i qui représente la ligne)

à cause du décalage (voir fig 2 pour
plus d'explications)

Ainsi après cela on augmente à chaque fois notre I_p de ($I_p = I_p + 1$)

Algo $k \geq 1, I_p \geq 1$

for $j = 1 \text{ to } N-1$ (j varie de $1 : N-1$)

for $i = 1 \text{ to } N-j$

$me(i, k) = [I_p, I_p+1, I_p+N-j+1]$

$k = k+1$

$I_p = I_p+1$

end

end

Vraie un peu comme cela se présentera.

(triangle inférieur)

(Première ligne)

Après pour le triangle supérieur on a:

$me(i, k) = [I_p+1, I_p+N-j+1, I_p+N-j+2]$

I_p+1 pourquoi?

On remarque que (Voir fig 2) le ^{deuxième} ~~premier~~ sommet du triangle inférieur est toujours le premier du supérieur. Étant donné que notre I_p était à 1 alors il faudrait donc l'augmenter de 1 pour qu'il puisse venir à 2 (indice du premier sommet du premier triangle supérieur).

Remarque: A la fin de la première boucle on remarque que I_p vaut 4 donc si on ne le ~~re~~ réinitialise pas I_p gardera la valeur 4 dans la suite, Pour régler ce problème on peut donc créer une variable temporaire temp et l'initialiser à 1 ($temp \geq 1$) et après poser $I_p = temp$.

Pour le deuxième sommet, la méthodologie est la même que celui du troisième sommet du triangle inférieur.

Pour le troisième sommet aussi c'est exactement le processus sauf qu'au lieu de retirer 1 ($N-j+1$) on retire 2 ($N-j+2$).
(Voir fig 2)

Algo $I_p = temp$ ($temp$ initialisé à 1)

for $i = 1 \text{ to } N-j-1$

$me(i, k) = [I_p+1, I_p+N-j+1, I_p+N-j+2]$

$k = k+1$

$I_p = I_p+1$

end

triangle
supérieur.

($j = 1 : N-1$)

Maintenant notre construction n'est pas encore totalement parfaite.

On remarque à la fin de la première deuxième boucle (triangle sup par la première ligne) $I_p = 4$. Donc la deuxième ligne va commencer avec $I_p = 4$, or le premier indice de la deuxième ligne est 6. Donc en étudiant notre fig. 2 on a remarqué que la fin de la précédente ligne (1^{er} sommet du dernier tri. sup) et le début de la ligne suivante (1^{er} sommet du 1^{er} tri. inf) sont reliés par $I_p = I_p + 2$.

Ainsi à la fin de la boucle du triangle sup il faut initialiser $I_p = I_p + 2$ et aussi $temp = I_p$.

On a donc notre tableau de me.

Q-6-) Méthodologie détaillée permettant de construire les tableaux de points q et connectivité me .

Heureusement ici, on a déjà fait tout le boulot plus haut en faisant les tableaux associés au triangle unité.

Il faudrait juste le seul truc à faire ici, c'est de savoir comment retrouver un triangle quelconque à partir d'un triangle unité.

Soit \hat{K} le triangle de référence de sommets $\hat{q}^0 = (0,0)$, $\hat{q}^1 = (1,0)$ et $\hat{q}^2 = (0,1)$ et K un triangle non dégénéré de sommets (q^0, q^1, q^2) la fonction F_K définie par :

$$F_K : \hat{K} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow K \subset \mathbb{R}^2$$

$$\hat{q} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \mapsto q = q^0 + (q^1 - q^0)\hat{x} + (q^2 - q^0)\hat{y}$$

est une bijection avec $F_K(\hat{q}^i) = q^i \quad \forall i \in \{0, 1, 2\}$

Ainsi, avec cette fonction définie on peut ~~très~~ facilement écrire
notre code.

Algo1

$[q, m] \leftarrow \text{meshes_untriangle}(H)$

$q = q_0 + (q_1 - q_0) \cdot \alpha(q_1, i) + (q_2 - q_0) \cdot \alpha(q_2, i)$

end

On a donc la création des tableaux de connectivité et de points associés
à un triangle quelconque.